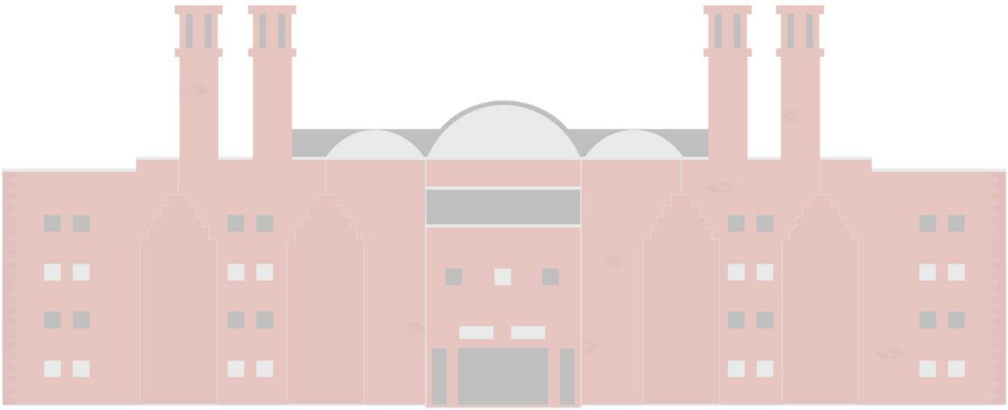
التحليل الرياضي ٣

المحاضرة الخامس عشر

7 صفحات



الدكتور: **معاذ عبد المجيد**

التاريخ: **2014/11/2**

المتسلسلات التابعية القصرية:

مبرهنة :

الشرط اللازم والكافي لتقارب السلسلة

$\sum_1^\infty f_{(n)}(z)=\sum_1^\infty u_n(x,y)+i\sum_1^\infty v_n(x,y)$ (١)

هو تقارب السلستين (٢) $\{\sum u_n , \sum v_n\}$ معاً ، ويكون:

$$f(z)=\Sigma f(z)=u+iv$$

$$u=\Sigma u_n \ , \ v=\Sigma v_n$$

♦ إذا كانت (١) متقاربة من أجل كل نقطة z من داخل D ، فإن D تسمى منطقة التقارب (١)

♦ نقول أن (١) متقاربة بالإطلاق إذا كانت سلسلة الطويلات $\sum \|f_n(z)\|$ متقاربة.

أما إذا كانت سلسلة الطويلات متباعدة بينما الأصلية (١) متقاربة سُمي التقارب شرطياً.

تنويه :كل متسلسلة متقاربة بالإطلاق هي متقاربة.

طرق اختبار التقارب المطلق

" اختبار كوشي ودالامبير"

نحسب النهاية $\|g(z)\|=\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right\|$ **نهاية دالامبير**

أو $\|g(z)\|=\lim_{n\to\infty} m\sqrt[n]{\|f_n(z)\|}$ **نهاية الجذر النوني (اختبار كوشي).**

وسيكون الناتج تابع حقيقي لأنه " قيمة مطلقة "

ونميز الحالات :

١- التقارب المطلق: $\|g(z)\| < 1$

٢- حالة الشك (محيط منطقة التقارب المطلق) $\|g(z)\|=1$

٣- عدم التقارب المطلق $\|g(z)\| > 1$

مثال: " هام جداً "

عين منطقة التقارب المطلق للمتسلسلة $\sum \frac{e^{2\pi i z n}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$

تنويه : عندما نكتب $\sum$ بدون نهاية أو بداية تكون $1 \to \infty$

١) متسلسلة تابعية فيها z

$$\|g(z)\| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left\|\frac{e^{2\pi i z n}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}\right\|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\|e^{2\pi i z}\|}{\left((n+1)^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{3}{2}}} = \|e^{2\pi i z}\|$$

أ- **التقارب المطلق :**

طوله ليس طول الأس $\|e^{2\pi i z}\|$

نكتبه بالشكل الجبري.

$$\|e^{2\pi i(x+iy)}\| = \|e^{2\pi i x - 2\pi y}\| = \left\|e^{2\pi i x}\right\| \left\|e^{-2\pi y}\right\|$$

$$\left\|e^{2\pi i x}\right\| = 1 \,,\, \left\|e^{-2\pi y}\right\| = e^{-2\pi y}$$

$$e^{-(2\pi)y} < 1$$

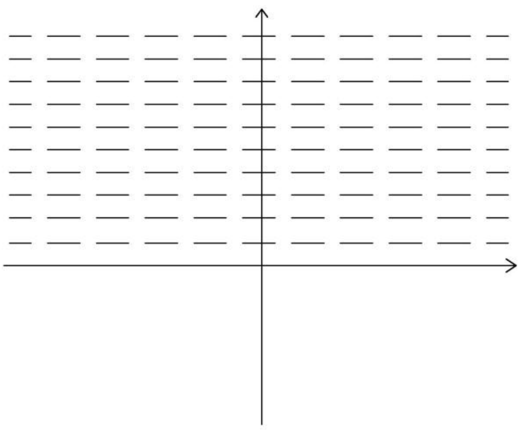
بأخذ $\ln$ الطرفين

$-2\pi y < \ln 1 = 0$ $\quad (y > 0)$ هذا هو التقارب.

كل عدد عقدي قسمه التخيلي موجب نعوضه بالمتسلسلة العقدية المعطاة ... المتسلسلة العددية متقاربة بالإطلاق.

ب- **العلاقة على المحيط:**

$y = 0 \Leftarrow \sum_1^\infty \frac{e^{2\pi i x n}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$ ندرس متسلسلة الطويلات.



$$\sum \left\|\frac{e^{2\pi i n x}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}\right\| = \sum \frac{1}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$\alpha = \frac{3}{2} > 1$ متسلسلة ريمان وهي متقاربة

منطقة التقارب المطلق $y \geq 0 \Rightarrow$

مثال: عين منطقة التقارب المطلق لهذه المتسلسلة $\sum (1+i)^n z^n$

اختبار الجذر النوني
$$\|g(z)\| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|(1+i)^n z^n\|}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \|1+i\|\,\|z\| = \sqrt{2}\|z\|$$

التقارب المطلق:

$$\|g(z)\| = \sqrt{2}\|z\| \Rightarrow \|z\| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

قرص دائري مفتوح مركزه O ونصف قطره $\frac{1}{\sqrt{2}}$

الدراسة على المحيط:

نعوض مكان كل Z من المتسلسلة Z من هذه الدائرة.

$$\|z\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow z = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{it} \ \{0 \le t \le 2\pi\}$$

$$\sum \left\| (1+i)^n \frac{e^{int}}{\sqrt{2^n}} \right\| = \sum \frac{\|(1+i)^n\|\|e^{int}\|}{2^{\frac{n}{2}}} = \sum 1^n = \infty$$

منطقة التقارب المطلق $\|z\| < \frac{1}{\sqrt{2}}$

المحيط وخارج المحيط إذا كان في تقارب

(ندرس التقارب بكتابتها بشكل جبري ثم ندرس كل واحدة على حدى $\cos int + i \sin int$)

نشر التوابع العقدية (تايلور , ماك_لوران)

نشر تايلور: ليكن $f(z)$ تحليلي في $\|z - z_0\| < b$ عندئذ يمكن نشر f بجوار هذا القرص

(بجوار z_0 وفق قوى $z - z_0$) بالعلاقة:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z+z_0)^n$$

b(نصف القطر) يمكن أن يكون البعد بين z_0 وأقرب نقطة شاذة (أو نقطة تفرع) لـ f

(أقرب مسافة ممكنة ، التابع يكون فيها تحليلي)

أما بالحالة الخاصة : $z_0=0$

وهي تسمى نشر ماك_لوران $f(z)=\sum_0^{\infty}\frac{f^n(0)}{n!}z^n$

قوانين شهيرة في النشر (حسب ماكلوران)

$$f^n(z)=e^z$$

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!} \qquad z\in C$$

$$e=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

$$sin\,z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{(2n+1)}}{(2n+1)!} \quad ,\ z\in\mathbb{C}$$

$$cos\,z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{(2n)}}{(2n)!} \quad ,\ z\in\mathbb{C}$$

$$\ln(1+z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{(n+1)}}{(n+1)} \quad ,|z|<1$$

$$cosh\,z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{(2n)}}{(2n)!} \quad ,\ z\in\mathbb{C}$$

$$Sinh\,z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{(2n+1)}}{(2n+1)!} \quad ,\ z\in\mathbb{C}$$

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad , \ \|z\|<1$$

$$(1-z)^n=1+nz+\frac{n(n-1)}{2!}z^2+\ \dots \quad ,\|z\|<1$$

مثال: انشر الدالة بجوار $f(z)=\frac{1}{\cos z}$ بجوار الصفر مبينا منطقة النشر

$$c\,\{\frac{\pi}{2}+\ \pi k\ ,k\epsilon\ z\}$$

$$f'(x)=\frac{\sin z}{\cos^2 z} \qquad\qquad f'(0)=0$$

$$f''(z)=\frac{\cos^3 z+2\cos z\sin^2 z}{\cos^4 z}\Rightarrow f''(z)=\frac{1+\sin^2 z}{\cos^3 z}\ ,f''(0)=1$$

نتابع عملية الاشتقاق:

$$\frac{1}{\cos z}=1+0+1\frac{z^2}{2!}+0\frac{z^3}{3!}+5\frac{z^4}{4!}$$

نشر لورانت :

ليكن $f(z)$ تحليلي في الحلقة $b_2\ \le \|z-z_0\|\le b_1$ عندئذ يمكن نشر $f(z)$ وفق لورانت (او وفق قوى z-z_0) في أي نقطة داخلية من الحلقة

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} A_n\,(z-z_0)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_{-n}}{(z-z_0)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}A_n(z-z_0)^n$$

$$b_2<\|z-z_0\|<b_1$$

حيث أن $\sum_{n=0}^{\infty}A_n(z-z_0)^n$ متقاربة بانتظام من تابع تحليلي $f_1(z)$ في القرص $\|z-z_0\|<b_1$ تسمى هذه السلسلة الجزء التحليلي الصحيح من متسلسلة لورانت f(z)

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_{-n}}{(z-z_0)^n}$ متقاربة بانتظام من تابع تحليلي $f_2(z)$ في المنطقة

$b_2 < ||z - z_0||$ تسمى الجزء الرئيسي من متسلسلة لورانت ل $f(z)$

ويكون $f(z) = f1(z) + f2(z)$ تحليلي في الحلقة

$b_2 < ||z - z_0|| < b_1$

وتعطى الثوابت بالعلاقة :

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

L أي منحني أملس مغلق تقع بالكامل داخل الحلقة

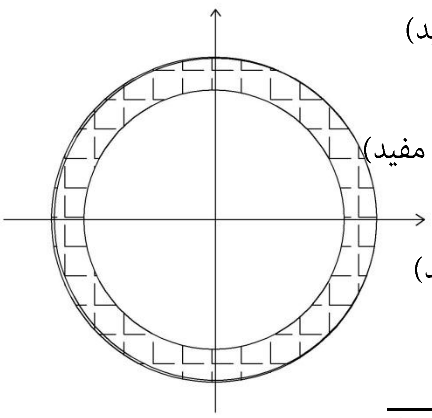
نسمي العدد A_{-1} راسب للتابع F في الحلقة $A_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z)\ dz$

ملاحظة : اذا كان الجزء الرئيسي من متسلسلة لورانت مطابق للصفر فان متسلسلة لورانت تصبح متسلسلة تايلور بجوار z_0

مثال: انشر وفق لورانت $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$ في الحلقة $2.5 < ||z|| < 2.75$:

ان التابع f تحليلي في $2.5 \le ||z|| \le 2.75$ (بدراسة انعدام المقام)

$$\frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{a}{(z-2)} + \frac{b}{(z-3)} = \frac{1}{(z-2)} - \frac{1}{(z-3)}$$



$\left\|\frac{z}{3}\right\| < 1 , ||z|| < 3$ $\quad \frac{1}{(z-3)} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_0^\infty \left(\frac{z}{3}\right)^n$ (نشر مفيد)

$\left\|\frac{z}{2}\right\| < 1 , ||z|| < 2$ $\quad \frac{1}{(z-2)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_0^\infty \left(\frac{z}{2}\right)^n$ (نشر غير مفيد)

$\left\|\frac{2}{z}\right\| < 1 , ||z|| > 2$ $\quad \frac{1}{(z-2)} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_0^\infty \left(\frac{2}{z}\right)^n$ (نشر مفيد)

$: 2.25 < ||z|| < 2.75$ $\quad \frac{1}{(z-2)(z-3)} = -\frac{1}{3} \sum_0^\infty \frac{z^n}{3^n} + \frac{1}{z} \sum_0^\infty \frac{2^n}{z^n}$

رئيسي تحليلي

الراسب $A_{-1} = 1$

مثال:

انشر وفق لورانت $f = \frac{2z-3}{z^2-3z+2}$ مرة بجوار $z_0 = 2$ ومرة اخرى بجوار $z_0 = 1$ مبينا منطقة النشر في كل حالة

z=2, z=1 نقاط شاذة $\quad f(z) = \frac{1}{(z-2)} + \frac{1}{(z-1)}$

بجوار ٢ أي وفق قوى $(z-2)$

$$\frac{1}{(z-1)} = \frac{1}{(z-2)+1} = \frac{1}{1-u} \qquad ; u = -(z-2)$$

$$\sum_0^\infty u^n \, ; ||u|| < 1$$

$$\frac{1}{(z-1)} = \sum_0^\infty [-(z-2)]^n : ||z-2|| < 1$$

$$f = \frac{1}{z-2} + \sum_0^\infty [(-1)^n (z-2)]^n \qquad : \qquad 0 < ||z-2|| < 1$$

الراسب $A_{-1} = 1$

ليس هناك حدود للعقل يقف عندها ، سوى تلك التي اقتنعنا بوجودها .

نابليون هيل